

TAREA 1

ELEMENTOS DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

Fecha de entrega: Miércoles 5 de febrero.

1. PROBLEMAS

Definiciones

Coeficiente binomial: Para $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, denotamos

$$\binom{a}{n} := \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}.$$

- Problema 1.** *i) Para a entero negativo, muestra que $\binom{a}{n} = (-1)^n \binom{-a+n-1}{n}$.
ii) Muestra que si a es entero, entonces $\binom{a}{n}$ también es entero.
iii) Para a entero positivo y $t \in \mathbb{R}$ encuentra n tal que $\binom{a}{n} t^n$ sea máximo.*

Problema 2. *Una urna contiene N bolas; R son rojas y $N - R$ son blancas. Se toma una muestra de n de ellas.*

- i) Para $i \in \{0, \dots, n\}$, ¿Cuántas muestras de tamaño n hay con exactamente i bolas rojas?
ii) Deduzca un caso particular de la fórmula de Chu-Vandermonde a partir de i) .
iii) ¿Cuál es la cantidad más probable de pelotas rojas que aparecerán en la muestra?*

Problema 3. *Un dado con k caras numeradas del 1 al k , se tira dos veces .Denotamos por p_i a la probabilidad de que aparezca la cara i .*

- i) Calcula la probabilidad de que la suma sea exactamente $k + 1$.
ii) Especializa i) para el caso uniforme, i.e. cuando $p_i = 1/k$.
iii) Usando i), encuentra p_i 's que maximizan dicha probabilidad.*

Problema 4. *Prueba la identidad*

$$\sum_{m=0}^n \binom{m}{j} \binom{n-m}{k-j} = \binom{n+1}{k+1},$$

, para cualesquiera enteros j, k, n tales que $0 \leq j \leq k \leq n$.

Sugerencia: Usa 1.i).